ЧИСЛА И ВЫРАЖЕНИЯ

1. Выражения, преобразование выражений

Числовые выражения составляются из чисел с использованием знаков действий («**+**», «**-**», «**•**», «**:**») и скобок. Например, **32:4**; **21•3+5; 3•(2:0,2–4)** – числовые выражения.

Значением числового выражения называется число, получающееся в результате выполнения всех действий в этом числовом выражении. Например, значения числовых выражений, приведённых выше, равны соответственно **8**; **68** и **18**.

Выражение, в котором встречается деление на нуль, не имеет числового значения, так как **на нуль делить нельзя**. Говорят, что такие выражения не имеют смысла.

Выражение, содержащее некоторые переменные величины, называется **выражением с переменными** (например, **10t**; **20a+10b**; **3c:d** и т.д.).

Значение выражения с переменными при данных значениях переменных – это значение числового выражения, которое получится, если в выражение с переменными вместо каждой переменной подставить данное её значение.

Например, значение выражения **20t+10b** при **t=0,1**, **b=0,2** равно **20•0,1+10•0,2=2+2=4**; значение выражения **3c:d** при **c=1**; **d=3** равно **(3•1):3=1**.

Для преобразования выражений применяются основные свойства сложения и умножения чисел:

1) для любых чисел **a** и **b** верны равенства **a+b=b+a**, **ab=ba** (**переместительное свойство**);

2) для любых чисел **a**, **b** и **c** верны равенства **(a+b)+c=a+(b+c)**, **(ab)c–a(bc)** (**сочетательное свойство**);

3) для любых чисел **a**, **b** и **c** верно равенство **a(b+c)=ab+ac** (**распределительное свойство**).

Два выражения называются **тождественно равными**, если их значения равны при любых допустимых значениях переменных.

Тождество – это равенство, верное при любых допустимых значениях переменных.

Тождественное преобразование выражения – это замена выражения другим, тождественно равным ему, выражением.

Пример 1. Найдите значение выражения **(3:(0,2–0,1)+4)•5**.
Решение.
1) **0,2–0,1=0,1**;
2) **3:0,1=30**;
3) **30+4=34**;
4) **34–5=170**.
Ответ: **170**.

Пример 2. Найдите значение выражения **(2mx+3n)•y** при **x=1**; **y=2**; **m=0,5**; **n=0,3**.
Решение.
Подставим значения переменных в выражение:
(2mx+3n)•y=(2•0,5•1+3•0,3)•2=(1+0,9)•2=1,9•2=3,8.
Ответ: **3,8**.

Пример 3. Вычислите значение выражения **11,2•3,1–11,2•1,1+22,4•(-0,5)**.
Решение.
11,2•3,1–11,2•1,1+22,4•(-0,5)=11,2•(3,1–1,1)–11,2 =11,2–2–11,2 =11,2•(2–1)=11,2.
Ответ: **11,2**.

Пример 4. Упростите выражение **(3x–2y–2)–(x–y)–4+2x+y+1**.
Решение.
(3x–2y–2)–(x–y)–4+2x+y+1= 3x–2y–2–x+y–4+2x+y+1=(3x–x+2x)–(2y–y–y)–(2+4–1)=4x–5.
Ответ: **4x–5**.

2. Степень с натуральным показателем, её свойства

Степенью некоторого числа **a** с натуральным показателем **n (n>1)** называется выражение

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{раз}}$$

$a^1=a$. При $a\neq 0$ считают $a^0=1$.
Например,
$5^3=5\bullet5\bullet5=125$; $(-2)^4=(-2)\bullet(-2)\bullet(-2)\bullet(-2)=16$ и т.д.
Свойства степени с натуральным показателем:
1) для любого положительного числа **a**: $a^n>0$; $0^n=0$.
2) для отрицательного числа **a**: $a^n>0$, если **n** – чётное число и $a^n<0$, если **n** – нечётное число;
3) $a^2\geq 0$ для любого числа **a**;
4) для любого числа **a** и любых натуральных чисел **m** и **n**: $a^m a^n=a^{m+n}$;
5) для любого числа $a\neq 0$ и любых натуральных чисел **m** и **n** таких, что $m>n$: $a^m:a^n=a^{m-n}$;
6) для любых чисел **a** и **b** и любого натурального числа **n**: $(ab)^n=a^n b^n$;
7) для любого числа **a** и любых натуральных чисел **m** и **n**: $(a^m)^n=a^{mn}$.

Пример 1. Найдите значение выражения: $(-2)^3\bullet3^2+16^2$.
Решение.
Вначале выполним возведения в степень:
$(-2)^3=(-2)\bullet(-2)\bullet(-2)=-8$;
$3^2=3\bullet3=9$;
$16^2=16\bullet16=256$.
Теперь найдём значение выражения:
$(-2)^3\bullet3^2+16^2=(-8)\bullet9+256=256–12=184$.
Ответ: **184**.

Пример 2. Упростите выражение $2x^2\bullet x^3–x^7:x^2$.
Решение.
Пользуясь свойствами **4)** и **5)**, имеем:
$2x^2\bullet x^3–x^7:x^2=2x^{2+3}–x^{7–2}=2x^5–x^5=x^5$.
Ответ: x^5.

Пример 3. Упростите выражение $((x^2y)^3)^4$.
Решение.
Пользуясь свойствами **6)** и **7)**, имеем: $((x^2y)^3)^4=(x^2y)^{3\bullet4}=(x^2y)^{12}=(x^2)^{12}\bullet y^{12}=x^{2\bullet12}\bullet y^{12}=x^{24}y^{12}$.
Ответ: $x^{24}y^{12}$.

3. Одночлены, многочлены

Одночленом называется выражение, являющееся произведением чисел, переменных и их степеней.

Например, выражения $2a^2b$; $2x^2\bullet(-4)^3yz^2$; $-5x^4$ – одночлены.

Стандартный вид одночлена – это произведение числового множителя, который стоит на первом месте, и степеней различных переменных.

Например, стандартным видом одночлена $(-2)^3x^4y\bullet(-3)$ является $24x^2y$.

Коэффициент одночлена – это числовой множитель этого одночлена, записанного в стандартном виде.

Степень одночлена – это сумма показателей степеней всех его переменных. Если одночлен является числом (не содержит переменных), то его степень считают равной нулю.

Многочлен – это выражение, являющееся суммой одночленов (если многочлен состоит из двух членов, его называют двучленом; если из трёх – трёхчленом).

Стандартный вид многочлена – это сумма одночленов стандартного вида без подобных слагаемых. Наибольшая из степеней одночленов, входящих в многочлен стандартного вида, называется степенью этого многочлена.

Степенью произвольного многочлена называется степень многочлена стандартного вида, тождественно равного исходному многочлену.

Для того чтобы **умножить одночлен** на **многочлен**, нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и сложить полученные произведения.

Для того чтобы **умножить многочлен** на **многочлен**, нужно каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго многочлена и сложить полученные произведения.

Разложить многочлен на множители означает представить этот многочлен в виде произведения двух или нескольких многочленов.

Формулы сокращённого умножения:

1) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$;

2) $(a\pm b)^3= a^3\pm 3ab+3ab^2\pm b^3$;

3) $a^2-b^2 =(a-b)(a+b)$;

4) $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$.

Пример 1. Приведите одночлен $2a^2\bullet(-3)^2b^3\bullet a(-2)b$ к стандартному виду, укажите его коэффициент и степень.

<u>Решение</u>.

$2a^2\bullet(-3)^2b^3\bullet a(-2)b=2\bullet 9\bullet(-2)a^2\bullet a\bullet b^3\bullet b=-36a^3b^4$.

Коэффициент данного одночлена равен **(-36)**, а его степень равна **7**.

<u>Ответ</u>: $-36a^3b^4$; - 36; 7.

Пример 2. Упростите выражение $2x(x-3)^2-(x-1)(2x^2+2)$.

<u>Решение</u>.

$2x(x-3)^2-(x-1)(2x^2+2)=2x(x^2-6x+9)-(2x^3+2x-2x^2-2)=2x^3-12x^2+18x-2x^3+2x^2-2x+2=16x+2-10x^2$.

<u>Ответ</u>: $16x+2-10x^2$.

Пример 3. Разложите на множители многочлен $x^3-8y^3+2x^2y+4xy^2+8y-5x$.

<u>Решение</u>.

$x^3-8y^3+2x^2y+4xy^2+8y-5x=(x-2y)(x^2+2xy+4)+2y(x^2+2xy+4)-5x=(x-2y+2y)(x^2+2xy+4)-5x=x(x^2+2xy+4-5)=x(x^2+2xy-1)$.

<u>Ответ</u>: $x(x^2+2xy-1)$.

4. Рациональные дроби и их свойства

Целые выражения – это выражения, составленные из чисел и переменных с использованием действий сложения, вычитания, умножения и деления на число, отличное от нуля.

Дробные выражения допускают также деление на выражение с переменными.

Целые и дробные выражения называют **рациональными выражениями**.

Допустимые значения переменных – это те значения переменных, при которых выражение имеет смысл.

Рациональная дробь – это дробь, числителем и знаменателем которой являются многочлены.

Основное свойство дроби: если числитель и знаменатель некоторой рациональной дроби умножить на один и тот же многочлен, не равный тождественно нулю, то получится дробь, равная исходной.

Тождество – это равенство, которое верно при всех допустимых значениях переменных, входящих в это равенство.

Свойства действий с рациональными дробями:

Если **a**, **b**, **c** – многочлены, причём многочлен **c** не равен нулю тождественно, то верно:

$$1)\ \frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

$$2)\ \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Если **a**, **b**, **c**, **d** – многочлены, причём многочлены **b** и **d** тождественно не равны нулю, то верно:

$$3)\ \frac{a}{b}\bullet\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$4)\ \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

Если **a**, **b**, **c**, **d** – многочлены, причём многочлены **b**, **c** и **d** тождественно не равны нулю, то верно:

$$5)\ \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

Пример 1.
Сократите дробь

$$\frac{x^2+2xy+y^2-1}{x-y+1}$$

Решение.

$$\frac{x^2+2xy+y^2-1}{x-y+1}=\frac{(x-y)^2-1}{x-y+1}=\frac{(x-y-1)(x-y+1)}{x-y+1}=x-y-1.$$

Ответ: **x–y–1**.

Пример 2.
Упростите выражение

$$\frac{2x^2-5}{(x-5)^3}-\frac{45}{(x-5)^3}$$

Решение.

$$\frac{2x^2-5}{(x-5)^3}-\frac{45}{(x-5)^3}=\frac{2\left(x^2-25\right)}{(x-5)^3}=\frac{2(x-5)(x+5)}{(x-5)(x^2-10x+25)}=\frac{2x+10}{x^2-10x+25}$$

Ответ: $\frac{2x+10}{x^2-10x+25}$.

Пример 3.
Выполните действия

$$\frac{x^2-3x}{2y^2}:\frac{x-3}{4y}$$

Решение.

$$\frac{x^2-3x}{2y^2}:\frac{x-3}{4y}=\frac{x(x-3)\bullet 4y}{2y^2(x-3)}=\frac{2x}{y}.$$

Ответ: $\frac{2x}{y}$.

5. Квадратные корни

Натуральные числа – это числа **1**, **2**, **3**, **4**, **…**, которые употребляются при счёте. Множество натуральных чисел обозначается **N**.

Целые числа – это натуральные числа, противоположные им числа и число нуль (**…, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …**). Множество целых чисел обозначается **Z** .

Рациональные числа – это целые и дробные числа. Множество рациональных чисел обозначается **Q**.

Всякое рациональное число может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n}$, где **m∈N**, **n∈N** (∈ – знак принадлежности некоторому множеству).

Всякое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной периодической дроби, и обратно: всякая бесконечная десятичная периодическая дробь есть некоторое рациональное число.

Однако рациональные числа – не все числа. Например, число, квадрат которого равен **2** (длина диагонали квадрата со стороной **1**), не является рациональным.

Бесконечные десятичные непериодические дроби называют **иррациональными числами**.

Действительные числа – это рациональные и иррациональные числа. Множество действительных чисел обозначают **R**.

Квадратный корень из числа a – это число, квадрат которого равен **a**. Например, **4** и **-4** – квадратные корни из **16**, так как $4^2=(-4)^2=16$.

Арифметический квадратный корень из числа a – это неотрицательное число, квадрат которого равен **a**.

Арифметический квадратный корень из числа а обозначают $\sqrt{a}$.

Например, $\sqrt{25}=5$, так как **5≥0** и $5^2=25$; $\sqrt{0}=0$ 0, так как **0≥0** и $0^2=0$.

То есть, $\sqrt{a}=b$, если **b≥0** и $b^2=a$.

Так как квадрат любого числа – неотрицательное число, то при а<0 выражение 4а не имеет смысла.

В зависимости от **a** уравнение $x^2=a$:

1) не имеет корней при **a<0**;

2) имеет единственный корень, равный нулю, при **a=0**;

3) имеет два корня $x_1=\sqrt{a}$ и $x_2=-\sqrt{a}$ при **a >0**.

Свойства арифметического квадратного корня:

1) Если **a≥0** и **b≥0**, то $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\bullet\sqrt{b}$;

2) Если **a≥0** и **b>0**, то $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;

3) При любых значениях **a** верно равенство $\sqrt{a^2}=|a|$.

Пример 1.

Найдите значение выражения

$$\left(\sqrt{36}\bullet\sqrt{0,01}-\sqrt{0,04}\bullet\sqrt{25}\right)^2$$

Решение.

$$\left(\sqrt{36}\bullet\sqrt{0,01}-\sqrt{0,04}\bullet\sqrt{25}\right)^2=(6\bullet 0,1-0,2\bullet 5)^2=(-0,4)^2=0,16.$$

Ответ: **0,16**.

Пример 2.

Решите уравнение

$$x^2=3^2+\sqrt{256}$$

Решение.

$$x^2=9+16=25$$
$$x=\pm\sqrt{25}=\pm 5$$

Ответ: **±5**.

Пример 3.

Найдите значение выражения

$$\sqrt{32\bullet 18\bullet 81}$$

Решение.

$$\sqrt{32 \bullet 18 \bullet 81} = \sqrt{16 \bullet 2\ \bullet 18 \bullet 81} = \sqrt{16} \bullet \sqrt{36} \bullet \sqrt{81} = 4 \bullet 6 \bullet 9 = 216$$

Ответ: **216**.

Пример 4.
Найдите значение выражения

$$\sqrt{\frac{8 \bullet 36}{18}}$$

Решение.

$$\sqrt{\frac{8 \bullet 36}{18}} = \sqrt{\frac{2 \bullet 4 \bullet 36}{2 \bullet 9}} = \sqrt{\frac{4 \bullet 36}{9}} = \frac{\sqrt{4} \bullet \sqrt{36}}{3} = \frac{2 \bullet 6}{3} = 4$$

Ответ: **4**.

Пример 5.
Упростите выражение

$$\left(\frac{\sqrt{75} - x}{x^2 - 75} + x + 5\sqrt{3}\right) : (x^2 + 10\sqrt{3}x + 74)$$

Решение.

$$1)\ \frac{\sqrt{75} - x}{x^2 - 75} + x + 5\sqrt{3} = -\frac{x - \sqrt{75}}{(x - \sqrt{75})(x + \sqrt{75})} + x + 5\sqrt{3} = x + 5\sqrt{3} - \frac{1}{x + 5\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(x + 5\sqrt{3})^2 - 1}{x + 5\sqrt{3}} = \frac{x^2 + 10\sqrt{3}x + 74}{x + 5\sqrt{3}}$$

$$2)\ \frac{x^2 + 10\sqrt{3}x + 74}{x + 5\sqrt{3}} : (x^2 + 10\sqrt{3}x + 74) = \frac{1}{x + 5\sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{1}{x+5\sqrt{3}}$.

6. Степень с целым показателем и её свойства

Если **a≠0** и **n** – целое отрицательное число, то $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

Выражение **0n** при **n∈Z**, **n≤0** не имеет смысла.

Примеры:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9};$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9.$$

Свойства степени с целым показателем:

Для всех **a≠0** и любых **m,n∈Z** верны равенства:

1) $a^m \bullet a^n = a^{m+n}$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$;

3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

Для всех **a≠0**, **b≠0** и любого **n∈Z** верны равенства

4) $(ab)^n = a^n b^n$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Стандартный вид числа b – это его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \le a < 10$, $n \in Z$. Число **n** называется порядком числа **b**.

Пример 1.
Вычислите $(5 \cdot 10^{-2}+6^{-1} \cdot 36-20^{-1})^2$.
Решение.
$$\left(5 \cdot 10^{-2}+6^{-1} \cdot 36-20^{-1}\right)^2=\left(5 \cdot \frac{1}{10^2}+\frac{1}{6} \cdot 36-\frac{1}{20}\right)^2=\left(\frac{1}{20}+6-\frac{1}{20}\right)^2=6^2=36.$$
Ответ: **36**.

Пример 2.
Упростите выражение
$$\left(a^{-2}-b^{-2}\right):\frac{(a-b)}{ab}$$
Решение.
$$\left(a^{-2}-b^{-2}\right):\frac{(a-b)}{ab}=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right) \cdot \frac{ab}{a-b}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2} \cdot \frac{ab}{a-b}=-\frac{(a-b)(a+b)}{(ab)^2} \cdot \frac{ab}{a-b}=-\frac{a+b}{ab}.$$

Ответ. $-\frac{a+b}{ab}$.

Пример 3.
Представьте число **36782** в стандартном виде и назовите его порядок.
Решение.
$36782=3678{,}2 \cdot 10=367{,}82 \cdot 10^2=36{,}782 \cdot 10^3=3{,}6782 \cdot 10^4$. Порядок числа равен **4**.
Ответ: **3,6782•104**; порядок **4**.

7. Корень n-й степени, степень с рациональным показателем и их свойства

Число, **n**-я степень которого равна **a**, называется **корнем n-й степени из числа a** ($n \in N$) и обозначается $\sqrt[n]{a}$.

Неотрицательное число, **n**-я степень которого равна отрицательному числу а, называется арифметическим **корнем n-й степени из числа a**.

Свойства арифметического корня n-й степени:

1) Если $a \ge 0$, $b \ge 0$, то $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

2) Если $a \ge 0$, $b > 0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

3) Если $n,k \in N$, $a \ge 0$, то $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$;

4) Если $n,k \in N$, $a \ge 0$, то $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Если $a>0$, $m \in Z$, $n \in N$, то $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Если $m,n \in N$, то $0^{\frac{m}{n}}=0$.

Свойства степени с рациональным показателем:

Для любого $a>0$ и $p,q \in Q$:

1) $a^pa^q=a^{p+q}$;

2) $a^p:a^q=a^{p-q}$;

3) $(a^p)^q=a^{pq}$.

Для любых $a>0$, $b>0$ и $p \in Q$:

4) $(ab)^p=a^p \cdot b^p$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Пример 1.
Найдите значение выражения

$$\sqrt[3]{8 \bullet 0,001} \bullet \sqrt[5]{\frac{243}{32}}$$

Решение.

$$\sqrt[3]{8 \bullet 0,001} \bullet \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \sqrt[3]{8} \bullet \sqrt[3]{0,001} \bullet \frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = 2 \bullet 0,1 \bullet \frac{3}{2} = 0,3.$$

Ответ: **0,3**.

Пример 2.
Упростите выражение

$$\left(\left(a^{-0,4}b^{0,2}\right)^5 \bullet a^2 b\right)^{\frac{1}{3}}$$

Решение.

$$\left(\left(a^{-0,4}b^{0,2}\right)^5 \bullet a^2 b\right)^{\frac{1}{3}} = ((a^{-0,4})^5 \bullet \left(b^{0,2}\right)^5 \bullet \mathrm{a}^2 b)^{\frac{1}{3}} = (a^{-2} \bullet \mathrm{b} \bullet \mathrm{a}^2 b)^{\frac{1}{3}} = \left(b^2\right)^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{2}{3}}$$

Ответ: $b^{\frac{2}{3}}$.