УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

1. Уравнения с одной переменной

Уравнение с одной переменной – это равенство, содержащее переменную.

Корень уравнения – это значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.

Решить уравнение означает найти все его корни или доказать, что корней нет.

Равносильные уравнения – уравнения с одними и теми же корнями.

Следующие преобразования приводят уравнение к **равносильному** ему уравнению:

• перенос слагаемого из одной части в другую с изменением знака этого слагаемого;

• умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же не равное нулю число.

Линейное уравнение с одной переменной – это уравнение вида **ax=b**, где **x** – переменная, **a** и **b** – некоторые числа.

1) Если **a=b=0**, то это уравнение имеет **бесконечно много решений**;

2) Если **a≠0**, то это уравнение имеет **один корень**: $x = \frac{b}{a}$;

3) Если **a=0** и **b≠0**, то это уравнение **не имеет корней**.

Пример 1.

Решите уравнение

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{(x+1)}{2} = 2$$

Решение.

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{(x+1)}{2} = 2;$$

$$\frac{4x-2-3x-3}{6} = 2;$$

$$\frac{x-5}{6} = 2;$$

$$x - 5 = 12;$$

$$x = 17.$$

Ответ: **17**.

Пример 2.

Решите уравнение

$$5x + \frac{2x+3}{4} = \frac{3x-1}{2} + 4x;$$

Решение.

$$5x + \frac{2x+3}{4} = \frac{3x-1}{2} + 4x;$$

$$\frac{22x+3}{4} = \frac{11x-1}{2};$$

$$44x + 6 = 44x - 4;$$

$$6 = -4,$$

то есть данное уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

2. Системы линейных уравнений

Линейное уравнение с двумя переменными – это уравнение вида **ax+by=c**, где **x** и **y** – переменные, **a**, **b** и **c** – некоторые числа. **Решение уравнения с двумя переменными** (не обязательно линейного) – это пара значений переменных, при подстановке которых в уравнение оно обращается в верное равенство.

Общий вид системы линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Решение системы уравнений с двумя переменными (не обязательно линейных) – это пара значений переменных, при подстановке которых в уравнение системы каждое из них обращается в верное равенство.

Алгоритм решения системы линейных уравнений с двумя переменными **методом подстановки**:

1) выразить из какого-нибудь уравнения системы одну переменную через другую;
2) подставить в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение;
3) решить полученное уравнение с одной переменной;
4) найти соответствующее значение второй переменной и выписать решение системы.

Алгоритм решения системы линейных уравнений с двумя переменными **методом сложения**:

1) умножить почленно уравнения системы, подобрав множители таким образом, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположны;
2) сложить почленно левые и правые части уравнений системы;
3) решить полученное уравнение с одной переменной;
4) найти соответствующее значение второй переменной и выписать решение системы.

Пример 1.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1; \\ 2x - 3y = 2. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения системы:

$$x = \frac{2 + 3y}{2}$$

Подставим получившееся выражение в первое уравнение вместо **x**:

$$\frac{2 + 3y}{2} - \frac{y}{3} = 1;$$

$$\frac{6 + 9y - 4y}{12} = 1;$$

$$5y + 6 = 12;$$

$$5y = 6;$$

$$y = \frac{6}{5}.$$

Найдём **x**:

$$x = \frac{2 + 3 \cdot \frac{6}{5}}{2} = \frac{14}{5}.$$

Ответ: (**2,8**; **1,2**).

Пример 2.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 2; \\ 2x + 3y = 5. \end{cases}$$

Решение.
Умножив первое уравнение на **(-4)**, получим систему

$$\begin{cases} -2x + y = -8; \\ 2x + 3y = 5. \end{cases}$$

Отсюда:

$$4y = -3;$$
$$y = -\frac{3}{4};$$
$$x = \frac{(5 - 3y)}{2} = \frac{5 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}{2} = \frac{29}{8}.$$

Ответ: $\left(\frac{29}{8}; -\frac{3}{4}\right)$.

3. Квадратные уравнения

Уравнение вида **ax+bx+c=0**, где **x** – переменная, **a**, **b**, **c** – некоторые числа, причём **a≠0** , называется **квадратным уравнением**.

Квадратное уравнение при **a=1** (то есть уравнение вида **x^2+bx+c=0**) называется **приведённым квадратным уравнением**.

Неполные квадратные уравнения (хотя бы один из коэффициентов **b** или **c** равен нулю):

1) **b=c=0**: **ax^2=0**.

Единственный корень **x=0**.

2) **b=0**, **c≠0**: **ax2+c=0**.

Это уравнение равносильно уравнению $x^2 = -\frac{c}{a}$.

Если $\frac{c}{a} > 0$, то $-\frac{c}{a} < 0$ и уравнение не имеет корней.

Если $\frac{c}{a} < 0$, то $-\frac{c}{a} > 0$ и уравнение имеет 2 корня:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}};$$
$$x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

3) **b≠0**, **c=0**: **ax^2+bx=0**.

Это уравнение равносильно уравнению **x(ax+b)=0**.

Оно имеет 2 корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a}$.

В общем виде квадратное уравнение **ax^2+bx+c=0**

1) при $D = b2 - 4ac \geq 0$ имеет корни $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$;

2) при $D = b2 - 4ac < 0$ не имеет корней.

Выражение **D=b2–4ac** называется **дискриминантом** квадратного уравнения **ax^2+bx+c=0**.

Теорема Виета: Если x_1 и x_2 — корни приведённого квадратного уравнения **x^2+px+q=0**, то

$$x_1 + x_2 = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Обратная теорема Виета: Если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, а $x_1 \cdot x_2 = q$, то эти числа являются корнями уравнения **x^2+px+q=0**.

Пример 1.
Решите уравнение $x^2-2x-3=0$
Решение.
$D=b2-4ac=(-2)^2-4\bullet1\bullet(-3)=4+12=16=4^2$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{4^2}}{2\bullet1}=\frac{2\pm4}{2}$$

$$x_1=\frac{2-4}{2}=-2;$$

$$x_2=\frac{2+4}{2}=3.$$

Ответ: -1; 3.

Пример 2.
Найдите сумму квадратов корней уравнения $x2+5x+1=0$.
Решение.
Если x_1 и x_2 — корни данного квадратного уравнения. Тогда по теореме Виета

$$x_1+x_2=-5$$

$$x_1\bullet x_2=1$$

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-5)^2-2\bullet1=25-2=23.$$

Ответ: 23.

Пример 3.
Решите уравнение

$$\frac{2x+1}{x-1}-\frac{x+1}{x-2}=2$$

Решение.

$$\frac{2x+1}{x-1}-\frac{x+1}{x-2}=\frac{(2x+1)(x-2)-(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{2x^2-3x-2-x^2+1}{x^2-3x+2}=\frac{x^2-3x-1}{x^2-3x+2};$$

$$\frac{x^2-3x-1}{x^2-3x+2}=2$$

$$x^2-3x-1=2x^2-6x+4;$$

$$x^2-3x+5=0;$$

$$D=9-4\bullet5=-11<0$$

Уравнение не имеет корней
Ответ: нет корней.

4. Неравенства с одной переменной и их системы

Общий способ сравнения чисел:
Число a больше числа b (a>b), если их разность a–b – положительное число; число a меньше числа b, если их разность a-b – отрицательное число.
Свойства числовых неравенств:
1) Если a>b, то b<a; если a<b, то b>a;
2) Если a<b и b<c, то a<b<c;
3) Если a<b и c∈R , то a+c<b+c;
4) Если a<b и c>0, то ac<bc; если a<b и c<0, то ac>bc;
5) Если a<b и c<d, то a+c<b+d;
6) Если a<b и c<d, a, b, c, d – положительные числа, то ac<bd.

Решение неравенства с одной переменной – это значение переменной, при котором неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство с одной переменной означает найти все его решения или доказать, что решений нет.

Решение системы неравенств с одной переменной – это значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.

Решить систему означает найти все её решения или доказать, что решений нет.

Метод интервалов решения неравенств с одной переменной:

Если неравенство имеет вид

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\bullet\ldots\bullet(x-x_n)>0\ (<0),$$

то в каждом из промежутков, на которые область определения разбивается точками $x_1, x_2, \ldots, x_n$, знак функции сохраняется, а при переходе через каждую из точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ её знак меняется.

Пример 1.

Решите неравенство

$$\frac{4x-1}{2}-x\geq 3x+2$$

Решение.

$$\frac{4x-1-2x}{2}\geq 3x+2;$$

$$2x-1\geq 6x+4;$$

$$4x\leq 5;$$

$$x\leq\frac{5}{4}$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right]$.

Пример 2.

Решите систему неравенств.

$$\begin{cases}(2x-3)-3(x-1)\geq 1\\ 2(x+5)-x\leq 3\end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases}2x-3-3x+3\geq 1,\\ 2x+10-x\leq 3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\leq -1,\\ x\leq -7.\end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -7]$.

Пример 3.

Решите неравенство

$$3x^2-x-\frac{5}{4}\geq 0$$

Решение.

Разложим квадратный трёхчлен $3x^2-x-\frac{5}{4}$ на множители. Для этого найдём его корни:

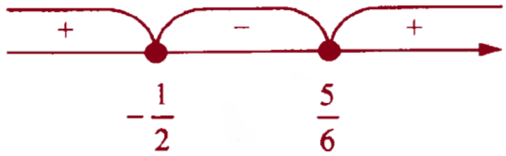
$$D=1+4\bullet 3\bullet\frac{5}{4}=16;$$

$$x=\frac{1\pm 4}{6};$$

$$x_1=-\frac{1}{2};$$

$$x_2 = \frac{5}{6}.$$

$$3x^2 - x - \frac{5}{4} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{6}\right) \geq 0$$



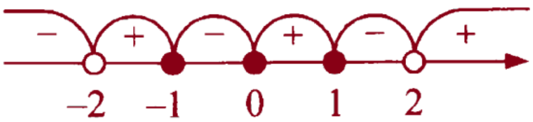
Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{6}; +\infty\right)$.

Пример 4.
Решите неравенство

$$\frac{x^3 - x}{x^2 - 4} \geq 0$$

Решение.

$$\frac{x(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$



Ответ: $(-2; -1] \cup [0; 1] \cup (2; +\infty)$.